

Зенонови парадокси

У одељењу IV7 природно-математичког смера Ужичке гимназије је 30. новембра 2023. године одржан угледни час на тему Зенонови парадокси којим је успостављена корелација између филозофије и математике - две наизглед различите, али итекако сродне науке. Филозофски проблеми, међу којима се највише истакао парадокс о Ахилу и корњачи, а које је осмислио старогрчки филозоф Зенон из Елеје доказујући „немогућност“ кретања, посматрани су кроз призму бесконачних опадајућих геометријских редова које ученици раде из математике на почетку четвртог разреда. Час је реализован у амфитеатру школе под руководством професорке филозофије Зорице Старчевић и професорке математике Дубравке Митрашиновић.

Тема: Зенонови парадокси, IV разред гимназије

Циљеви часа: представити ученицима филозофске идеје којима се водио старогрчки филозоф Зенон када је осмислио своје познате парадоксе и анализирати их из математичког угла путем бесконачних геометријских редова.

Васпитни циљеви: развијање отворености за необичне приступе проблемима.

Задаци: истражити старогрчке филозофе, нарочито Зенона и његове парадоксе, обновити геометријски низ и суму бесконачног геометријског реда, припремити улоге, костиме и савладати текст за извођење представе, ослободити се од треме пред јавни наступ

Функционални задаци: заснивање елементарног дијалектичког модела мишљења.

Исходи: ученици ће бити у стању да наведу, разумеју, анализирају и вреднују Зенонове парадоксе, образложе филозофске идеје којим се водио Зенон, дефинишу појам бесконачног геометријског реда, наведу формулу за израчунавање суме бесконачног геометријског низа изведену помоћу лимеса, примене наведену формулу у Зеноновом парадоксима.

Међупредметне компетенције: Компетенција за целоживотно учење, Сарадња, Комуникација, Естетичка компетенција.

Међупредметна корелација: Филозофија и Математика

Уводни део часа:

Ученици-водители (Ђурђа Бугариновић и Урош Ерић) су отворили час представљајући свим присутнима појам филозофије и појам математике, особености ове две научне дисциплине, као и њихове сличности и разлике. Невели су познате античке филозофе који су се дали значајне доприносе развоју математике: Талес, Хераклит, Питагора, други... Посебну пажњу су обратили на Зенона и најавили његове парадоксе уз објашњење шта појам „парадокс“ значи. Пажња се премешта на костимираног Зенона и групу ученика уз најаву да ће ускоро све бити јасније.



Средишњи део часа:

Ученик Урош Бурлић у улози Зенона прича групи ученика (Сара Караклајић, Жарко Старчевић, Исидора Прљевић, Ана Дабовић, Матија Токовић, Мина Ћитић, Милица Обреновић, Анђела Ђалдовић, Тамара Вујошевић, Алекса Вирић и Немања Делић) о парадоксима кретања, док Матија Новаковић костимиран у сунце и Тара Тасић костимирана у дрво дочаравају атмосферу природног окружења у коме се приповедање одвија.

Зенон представља свој први парадокс – Дихотомију на следећи начин: *„После дугог дана седења и размишљања одлучио сам да прошетам од своје куће до шуме. Свеж ваздух ме освежава и помаже ми да боље мислим. Да би дошао до шуме, прво прођем половину пута. Овај део путовања траје коначан период времена. Када пређем пола пута, морам да пређем половину остатка. Поново, ово траје коначан период времена. Када стигнем тамо, још увек морам да пређем половину пута који ми преостаје, што траје још један коначан период времена. Ово се понавља изнова и изнова и изнова. Дакле, колико ми треба времена да дођем до шуме? бесконачно много времена. Другим речима, свако кретање је немогуће!“*

Група ученика изражава своје негодовање и сумњу и из групе се издваја ученик Немања Делић који, у улози математичара, сагледава проблематику бесконачног збира временских интервала који под оваквим условима ипак дају коначан број. Његово излагање гласи: *„Да решимо парадокс, помаже нам да претворимо причу у математички проблем. Претпоставимо да је Зенонова кућа од шуме удаљена 4 километра и да Зенон прелази 4 километара на сат. Здрав разум нам говори да време путовања треба да буде 1 сат. Ипак, хајде да сагледамо ствари из Зеноновог угла и поделимо путовање у делове. Прва половина путовања траје пола сата, следећа траје четврт сата, следећа осмину сата, и тако даље. Као што су математичари од тада схватили, могуће је збрајати бесконачан низ могућих коначних израза и опет добити резултат који је коначан. „Како?“, питате се ви. Размишљајмо о томе овако. Почнимо са квадратом који заузима површину од једног квадратног метра. Сада, хајде да пресечемо квадрат на пола, и онда да пресечемо преосталу половину на пола, и тако даље. Ипак, колико год пута ми да пресечемо квадрат, целокупна површина је још увек збир површина свих делова. Сада увиђате зашто смо изабрали баш овај начин да пресецамо квадрат. Добили смо исти бесконачан низ који смо имали за време Зеноновог путовања. Како ми комбинујемо све више и више делова (n делова), да кажемо то математички – пустимо лимес када „ n “ тежи бесконачном, цео квадрат постаје прекривен мањим деловима. Не само да је збир бесконачног низа коначан одговор, него је и коначан одговор исти онај за који нам здрав разум говори да је тачан. Зеноново путовање траје један сат.“*

Зенон представља свој следећи парадокс – Парадокс стреле: *„Посматрамо стрелу која лети кроз ваздух. У сваком тренутку стрела се налази на неком одређеном положају. Током тог тренутка она се не креће, дакле мирује. Али ако стрела стално мирује – како онда у целини може да се креће? Закључујем, дакле, да је кретање илузија!“*

Ученица Мина Ћитић устаје из групе и прекида Зенона у излагању. На сличан начин као и Немања Делић, користећи Лајбницов и Њутнов инфинитезимални рачун, објашњава је концепт постојања коначне граничне вредности суме бесконачног геометријског низа брзина стреле.



Након ова два парадокса, Зенон објашњава и трећи, вероватно најчувенији, причу о Ахилу и корњачи. Ахил, грчки херој, узет је као симбол брзине. Корњача је животиња која је позната по свом спором кретању. Јунак из Троје и корњача трчали су трку, али пошто је био много бржи, Ахил је корњачи дао извесну предност. Зенон износи аргументацију према којој Ахил корњачу никад неће стићи - за време које је Ахилу потребно да стине на место где се налази корњача, корњача ће се померити нешто даље. Када Ахил буде стигао на место где се корњача померила, она ће се померити још мало. Овај низ растојања ће се наставити у бесконачност.

Док Зенон објашњава свој Парадокс о Ахилу и корњачи, један ученик глуми Ахила (Вук Нијемчевић), а други имитира корњачу (Лука Петровић) налазећи се у великој картонској кутији. Ученик Страхинја Пековић наглас мери растојање између Ахила и корњаче након сваког померања.



Последњи математички поглед на парадокс даје ученица Сара Караклајић. Поједностављује проблем без губитка на тачности решења. Нека је корњача 10 пута спорија од Ахила и нека је 10 метара предности испред њега. Ахил ће прво прећи 10 метара, а за то време ће корњача прећи 1 метар. Када Ахил пређе 1 метар, корњача ће прећи $\frac{1}{10}$ метра. Записује на табли пут који Ахил треба да пређе да би стигао корњачу: $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \dots$



Објашњава свим присутнима да је написно заправо геометријски низ, појам добро познат математичарима. Дефинише особине које има и да је сума бесконачно много чланова геометријског низа заправо геометријски ред. Уводи формулу на табли како се рачуна сума геометријског реда преко лимеса. Заменом вредности за први члан и количник геометријског низа, закључује да пут који Ахил треба да пређе да би сустигао корњачу је $100/9$ метара, што је коначан пут. Грешка је била у претпоставци да сума бесконачно много бројева не може бити коначан број!

Зенон остаје замишљен.

Завршни део часа

Ученици-водители, Ђурђа и Урош, износе констатацију да Зенонови парадокси преко две хиљаде година збуњују, изазивају, утичу, инспиришу и задивљују филозофе, математичаре, физичаре и школску децу. Питају присутне да ли су збунили на њих и подстичу их на дискусију о свему што су видели.



Режију мини представе је на себе преузела ученица Сара Караклајић, костимографијом се бавила ученица Теодора Ковачевић, а сценарио су креирале професорке Зорица Старчевић и Дубравка Митрашиновић.

Дубравка Митрашиновић,
професор математике Ужичке гимназије